

霍振华, 段晚锁. 2015. 关于线性奇异向量和条件非线性最优扰动差别的一个注记 [J]. 气候与环境研究, 20 (6): 715–725. Huo Zhenhua, Duan Wansuo. 2015. A note on the differences between linear singular vectors and conditional nonlinear optimal perturbation [J]. Climatic and Environmental Research (in Chinese), 20 (6): 715–725, doi:10.3878/j.issn.1006-9585.2015.14259.

关于线性奇异向量和条件非线性最优扰动 差别的一个注记

霍振华^{1,2} 段晚锁¹

1 中国科学院大气物理研究所大气科学和地球流体力学数值模拟国家重点实验室, 北京 100029

2 中国科学院大学, 北京 100049

摘要 奇异向量(singular vectors, SVs)和条件非线性最优扰动(conditional nonlinear optimal perturbation, CNOP)已广泛应用于研究大气—海洋系统的不稳定性以及与其相关的可预报性、集合预报和目标观测问题研究。本文首先回顾了 SVs 和 CNOP 的发展历史, 并简单描述了它们的基本原理; 然后针对二维正压准地转模式, 使用不同的范数组合, 分析了第一线性奇异向量(first singular vector, FSV)和 CNOP 之间的异同。结果表明, 当优化时间较短时, 度量 SVs 和 CNOP 大小的范数不同也将导致 FSV 和 CNOP 相差很大, 而当度量 SVs 和 CNOP 大小的范数相同时, FSV 和 CNOP 之间的差别则主要是由非线性物理过程作用的结果。因此, 针对不同的物理问题, 应该选取合适的度量范数研究 FSV 和 CNOP 以及其所引起的大气或海洋动力学的异同, 从而揭示非线性物理过程的影响机理。

关键词 奇异向量 条件非线性最优扰动 非线性

文章编号 1006-9585 (2015) 06-0715-11

中图分类号 P435

文献标志码 A

doi:10.3878/j.issn.1006-9585.2015.14259

A Note on the Differences between Linear Singular Vectors and Conditional Nonlinear Optimal Perturbation

HUO Zhenhua^{1,2} and DUAN Wansuo¹

1 State Key Laboratory of Numerical Modeling for Atmospheric Sciences and Geophysical Fluid Dynamics, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029

2 University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049

Abstract Singular Vectors (SVs) and Conditional Nonlinear Optimal Perturbation (CNOP) have been widely adopted in studies of the instabilities of the atmospheric and oceanic systems, the related predictability, ensemble forecasting, and targeted observations. This paper firstly reviews the development of SVs and CNOP and gives a brief description of their fundamental principles. Then, the similarities and differences between the First Singular Vector (FSV) and CNOP are discussed with a two-dimensional nondimensional barotropic quasi-geostrophic model and different combinations of norms. The results show that the different norms used to evaluate the amplitudes of SVs and CNOP induce a large difference between the FSV and CNOP even if the optimization time is relatively short, while the difference between the FSV and CNOP is mainly due to nonlinear physical processes when using the same norms to evaluate the amplitudes of

收稿日期 2014-12-04; **网络预出版日期** 2015-05-13

资助项目 国家自然科学基金项目 41176013、41376018

作者简介 霍振华, 女, 1989 年出生, 博士研究生, 主要从事可预报性研究。E-mail: hzh11hzh@126.com

通讯作者 段晚锁, E-mail: duanws@lasg.iap.ac.cn

SVs and CNOP. So, appropriate norms should be taken into account for different physical problems, in order to investigate the similarities and differences between the FSV and CNOP, and the atmospheric or oceanic dynamics they cause, and further to reveal the mechanism of influence of nonlinear physical processes.

Keywords Singular vector, Conditional nonlinear optimal perturbation, nonlinearity

1 引言

由于观测的系统误差以及资料同化系统的局限性,用于数值天气、气候预报模式的初始分析场存在不确定性,即存在初始分析误差;此外,由于人们对大自然的认识水平的限制,目前的数值预报模式还不能确切地描述大气和海洋的运动,而且数值模式是离散化的数值模型,因而数值模式必然存在表征物理过程或计算近似造成的不确定性,即模式误差。对任一数值天气、气候预报系统来说,初始误差和模式误差都是不可避免的,并且常常导致数值预报结果的不确定性 (Mu et al., 2002, 2010; Zheng et al., 2009; Duan and Zhang, 2010)。为了分别研究初始误差和模式误差在产生预报结果不确定性中的作用, Lorenz (1975) 将可预报性问题归为两类: 第一类可预报性问题和第二类可预报性问题。前者假定模式完美, 仅考虑初始误差对预报结果的影响; 而后者则假定初始场不存在误差, 仅考虑模式误差带来的预报结果不确定性问题。

为了研究第一类可预报性问题, 学者们先后提出了不同的方法。例如, Lorenz (1965) 在分析动力系统中预报误差的增长时首次引入奇异向量 (singular vectors, SVs) 的概念。SVs 是线性模式中在有限时段内增长最快的一组正交的扰动。目前, SVs 已应用于研究大气—海洋运动的不稳定性 (Trefethen et al., 1993; Penland and Sardeshmukh, 1995)、预报误差的估计 (Palmer et al., 1994; Ehrendorfer and Tribbia, 1997; Gelaro et al., 1998; Descamps et al., 2007)、集合预报 (Mureau et al., 1993; Buizza and Palmer, 1995; Molteni et al., 1996; Leutbecher and Palmer, 2008), 以及目标观测 (Palmer et al., 1998; Langland, 2005; Buizza et al., 2007) 等问题。尽管 SVs 在可预报性问题研究中发挥着重要的作用, 但 SVs 却有着自身的局限性: SVs 基于线性理论, 其使用的前提条件是初始扰动充分小, 且该扰动的非线性发展由切线性模式 (TLM) 近似描述。因此, 对于复杂的大气和海洋系统来说, 基于线性理论的 SVs 不能反映非线性物理过程对天

气和气候可预报性的影响, 在研究非线性模式中有限振幅初始误差引起的可预报性问题时具有局限性。

为了考察非线性物理过程对可预报性的影响, Mu et al. (2003) 将 SVs 方法拓展到非线性领域, 提出了条件非线性最优扰动 (conditional nonlinear optimal perturbation, CNOP) 方法。CNOP 是在满足一定物理约束条件下, 且在预报时刻具有最大非线性发展的一类初始扰动。与最大奇异值对应的奇异向量 (第一奇异向量; first singular vector, FSV) 相比, CNOP 在预报时刻关于初始扰动的增长率可能没有 FSV 大, 但其在预报时刻有更大的非线性发展, 从而代表了对预报结果不确定性有最大影响的一类初始误差。

CNOP 已应用于研究天气和气候的可预报性问题的研究 (Duan et al., 2004, 2013; 穆穆等, 2007; Mu et al., 2007a, 2007b, 2009; Rivière et al., 2008; Terwisscha van Scheltinga et al., 2008; Sun and Mu, 2009; Qin and Mu, 2011; Yu et al., 2012; Zhou and Mu, 2012; 段晚锁等, 2013; 穆穆和段晚锁, 2013; 谢东东等, 2013; 周菲凡和张贺, 2014)。这些研究一致表明: 当初始扰动的约束半径较小 (即初始扰动的振幅较小), 且优化时间较短时, CNOP 与 FSV 的空间结构差别较小, FSV 可以近似 CNOP; 然而, 当初始扰动的约束半径较大或者优化时间较长时, CNOP 和 FSV 的空间结构之间存在明显差别。姜智娜 (2007) 探讨了 CNOP 在产生集合预报初始扰动场研究中的应用 (Mu and Jiang, 2008; Jiang and Mu, 2009; Jiang et al., 2009)。结果表明, 对于快速增长类型的分析误差, 在 SVs 初始扰动集合中, 使用 CNOP 代替 FSV 后, 集合预报效果与 SVs 方法相比得到了显著改善。该结果意味着, CNOP 的空间结构与 FSV 有显著差别, 否则集合预报效果不会改进。尤其值得一提的是, 即使在优化时间比较短的情形下, 用 CNOP 代替 FSV, 集合预报效果也显著改善, 那么是否在优化时间比较短时, FSV 和 CNOP 的空间结构也可能有较大差别呢? 事实上, Jiang and Mu (2009) 用二维正压准地转模式表明了 CNOP 和 FSV 在较短的优化时间也可能存在较

大差别。如他们表明, 当优化时间为 2 天时, FSV 和 CNOP 的空间结构具有很大差别。我们知道, FSV 和 CNOP 的核心差别在于, CNOP 考虑了非线性物理过程的影响。那么, 上述关于 FSV 和 CNOP 的差别是否由非线性物理过程的作用导致的呢? 本文将用二维正压准地转模式探讨这个问题, 从而进一步阐明 FSV 和 CNOP 的异同。

2 线性奇异向量和条件非线性最优扰动

2.1 线性奇异向量

假定 \mathbf{X} 是一个状态向量, 它是如下初值问题的解:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = \mathbf{A}(\mathbf{X}), \\ \mathbf{X}|_{t=0} = \mathbf{X}_0, \end{cases} \quad (1)$$

其中, \mathbf{X}_0 是 \mathbf{X} 的初始状态向量, \mathbf{A} 是一个非线性偏微分算子。假定 \mathbf{M}_t 是方程 (1) 的解算子, 则方程 (1) 在预报时刻 t 的解 $\mathbf{X}(t)$ 可以写成如下的形式:

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{M}_t(\mathbf{X}_0). \quad (2)$$

对方程 (1) 进行线性化, 则可以得到针对 $\mathbf{X}(t)$ 的扰动向量 $\mathbf{x}(t)$ 满足下列切线性模式:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \mathbf{A}_t \mathbf{x}, \\ \mathbf{x}|_{t=0} = \mathbf{x}_0, \end{cases} \quad (3)$$

其中, $\mathbf{A}_t = \partial \mathbf{A} / \partial \mathbf{X}$ 是相对于状态向量 $\mathbf{X}(t)$ 的切线性算子。假定 $\mathbf{L}_t = \partial \mathbf{M}_t / \partial \mathbf{X}$ 是切线性模式 (3) 的传播算子, 即解算子。因此, 方程 (3) 在预报时刻 t 的解 $\mathbf{x}(t)$ 可以写成如下的形式:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{L}_t(\mathbf{x}_0). \quad (4)$$

假定在初始时刻 $t=0$, 扰动的大小由范数 $\|\cdot\|_c$ 来度量; 在最终时刻 t , 扰动发展的大小由范数 $\|\cdot\|_f$ 来度量。为简单起见, 我们称范数 $\|\cdot\|_c$ 为初始扰动范数, 范数 $\|\cdot\|_f$ 为扰动发展范数, 其具体形式如下:

$$\|\mathbf{x}\|_c^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x}, \quad (5)$$

$$\|\mathbf{x}\|_f^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{D} \mathbf{x}, \quad (6)$$

其中, \mathbf{C} 和 \mathbf{D} 是正定矩阵, 它们定义了范数的具体形式。需要注意的是: 尽管在经典的奇异向量理论中 \mathbf{C} 和 \mathbf{D} 是一样的, 实际上根据具体问题的需要, \mathbf{C} 和 \mathbf{D} 可以取为不同的形式。如当我们研究同一物

理性的初始误差所引起的预报误差时, \mathbf{C} 和 \mathbf{D} 可以取为简单的单位矩阵, 即初始扰动范数和扰动发展范数都取为欧氏范数; 如果我们研究位势高度场的初始误差所引起的位涡预报误差, 则可以将初始扰动范数取为流函数平方范数, 将扰动发展范数取为涡度拟能范数。因此, \mathbf{C} 和 \mathbf{D} 须根据具体问题而确定。在上述范数度量的定义下, 考虑初始扰动在最终时刻和初始时刻的大小之比:

$$\frac{\|\mathbf{L}_t(\mathbf{x}_0)\|_f}{\|\mathbf{x}_0\|_c}, \quad (7)$$

即考虑初始扰动发展到最终时刻 t 时被放大或缩小的倍数, 或称为初始扰动的增长率, 这里须要指出的是, (7) 式是在方程 (3) 的基础上定义的, 方程 (3) 是无穷维动力系统, 即是说 (7) 式定义在无限维空间。因此, 要使 (7) 式有意义, 须假定方程 (3) 的传播算子 $\mathbf{L}_t = \partial \mathbf{M}_t / \partial \mathbf{X}$ 是有界的。鉴于此, 以下关于最优扰动的讨论都是建立在有限维空间的基础上。

Leutbecher and Palmer (2008) 研究表明, 如果假定 σ_i 和 \mathbf{v}_i 是如下特征值问题的第 i 个特征值和相应的特征向量 (特征值按照 i 降序排列):

$$\mathbf{L}_t^T \mathbf{D} \mathbf{L}_t \mathbf{x} = \sigma^2 \mathbf{C} \mathbf{x}, \quad (8)$$

那么, \mathbf{L}_t 的第一个奇异向量 \mathbf{v}_1 使得 (7) 式达到最大值 σ_1 ; 在与第一个奇异向量 \mathbf{v}_1 关于初始范数 $\|\cdot\|_c$ 正交的子空间中, \mathbf{L}_t 的第二个奇异向量 \mathbf{v}_2 使得 (7) 式取值 σ_2 ; 依此类推, 在与 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{j-1}$ 关于初始范数正交的子空间中, \mathbf{L}_t 的第 j 个奇异向量 \mathbf{v}_j 使得 (7) 式取值 σ_j 。因此, SVs 是在全局或局部范围内取得最大增长率的扰动, FSV 则是在全局范围内具有最大的初始扰动增长率。根据 (7) 式, 我们可以看到, 给定任一非零常数 c , 向量 $c\mathbf{v}_1$ 同样在全局范围内有最大的扰动增长率, 从而向量 $c\mathbf{v}_1$ 也是 FSV。

引言中已经提到, 许多研究使用 FSV 探讨天气和气候的可预报性问题。根据以上讨论, 可以看出, 应用 FSV 的前提是初始扰动的发展可以由切线性模式近似描述, 也就是说, FSV 只能刻画短时间内非线性模式中小扰动的发展, 而不能用于研究有限振幅初始扰动的发展或小扰动的长期发展 (Mu et al., 2003; Duan and Mu, 2009)。此外, 需要注意的是, 在经典的 SVs 理论中, 初始扰动范数和扰动发展范数是一致的。

2.2 条件非线性最优扰动

为了考察非线性对天气和气候可预报性的影响, Mu et al. (2003) 提出了条件非线性最优扰动 (CNOP) 方法。对于 2.1 节所述的非线性模式, 初始扰动 \mathbf{x}_0^* 称为 CNOP, 当且仅当

$$J(\mathbf{x}_0^*) = \max_{\|\mathbf{x}_0\| \leq \delta} J(\mathbf{x}_0), \quad (9)$$

$$J(\mathbf{x}_0) = \|\mathbf{M}_t(\mathbf{X}_0 + \mathbf{x}_0) - \mathbf{M}_t(\mathbf{X}_0)\|_r, \quad (10)$$

其中, $J(\mathbf{x}_0)$ 是度量扰动发展大小的目标函数, 范数 $\|\cdot\|_c$ 和 $\|\cdot\|_r$ 如上节所述, 用于度量初始扰动和扰动发展大小的范数, $\|\mathbf{x}_0\|_c \leq \delta$ 是关于初始扰动大小的约束条件 (δ 称为约束半径)。CNOP 是在满足一定的初始扰动约束条件下, 且在预报时刻具有最大非线性发展的一类初始扰动, 它对预报结果不确定性有最大的影响。范数 $\|\cdot\|_c$ 和范数 $\|\cdot\|_r$ 一般根据具体的物理问题而定, 两者可不同, 这与经典奇异向量相同的初始扰动范数和扰动发展范数是不一样的。

CNOP 具有明确的物理意义。首先, CNOP 可以描述某一天气或气候事件的最优前期征兆, 其最有可能发展成该事件的初始距平模态 (Duan et al., 2004, 2013); 其次, 作为叠加在某一天气或气候事件上的初始扰动, CNOP 代表了在预报时刻对预报结果产生最大影响的一类初始误差 (Mu et al., 2007a, 2007b; Yu et al., 2012); 此外, CNOP 代表了有限时段内非线性最不稳定 (或最敏感) 的初始扰动, 该类扰动在预报时刻有最大的非线性发展 (Terwisscha et al., 2008; Sun and Mu, 2009)。

3 试验及结果

正如引言所述, FSV 和 CNOP 在优化时间较短时, 也可能存在较大差别。那么, 这里我们需要回答的问题是: 这种差别是否由非线性物理过程的影响而导致的? 本节将通过数值试验阐明这个问题, 进而说明 FSV 和 CNOP 的异同。

在数值试验中, 我们计算 CNOP 和 FSV 的基本设置与 Mu and Jiang (2008) 和 Jiang and Mu (2009) 的试验设置是一致的, 即试验使用的模式是二维正压准地转模式, 且模式满足双周期边界条件, 研究区域是 $\Omega = [0, 6.4] \times [0, 3.2]$, 具体对应的是 $6400 \times 3200 \text{ km}^2$; 在纬向和经向上, 该区域划分为 32 和 16 个网格; 模式时间的一天对应模式积分

144 个时间步长, 更详细的试验设置参见 Mu and Jiang (2008)。

在试验中, 我们分别选择了两种范数度量扰动的大小, 即能量范数和 L_2 范数, 具体定义如下所示:

$$\|\varphi\|_E^2 = \int_{\Omega} (|\nabla\varphi|^2 + F|\varphi|^2) dx dy, \quad (11)$$

$$\|\varphi\|_{L_2}^2 = \int_{\Omega} \varphi^2 dx dy, \quad (12)$$

其中, $\|\cdot\|_E$ 代表的是能量范数, $\|\cdot\|_{L_2}$ 代表的是 L_2 范数, φ 是流函数, $F = 0.102$ 是行星尺度 Froude 数。

Mu and Jiang (2008) 和 Jiang and Mu (2009) 使用 SVs 和 CNOP 方法产生用于集合预报的初始扰动场, 具体做法如下: (1) 对于一个给定的初始场, 积分模式得到一个状态。假定该状态为真实场, 即为数值试验中将要预报的对象; (2) 对于上述真实场, 在所在区域的每个格点上叠加一个具有正态分布的随机误差, 得到观测场; (3) 使用四维变分资料同化, 将该观测同化到数值模式, 产生一个最优初始分析场; (4) 以最优初始分析场作为初值, 积分模式得到相对于真实场的一个控制预报; (5) 以控制预报为基态求解 SVs 和 CNOPs, 从而产生集合预报的初始扰动场。

本文的主要目的是探讨优化时间较短时 FSV 和 CNOP 的差别是否由非线性物理过程的影响导致。为了和 Mu and Jiang (2008) 和 Jiang and Mu (2009) 等的结果形成较好的对应关系, 本文使用 Mu and Jiang (2008) 中已经给定的真实场的初始场 ψ_0 :

$$\psi_0 = 0.5 \sin\left(\frac{2\pi x}{2X}\right) + \sin\left(\frac{2\pi y}{2Y}\right) + 0.5, \quad (13)$$

并采用他们计算 CNOPs 和 FSVs 的思路, 即如上所述, 以四维变分资料同化方法产生的初始分析场对应的控制预报为基态计算 CNOPs 和 FSVs。真实初始场 ψ_0 和对应的初始分析场的空间结构如图 1 所示。

分别以能量范数和 L_2 范数为度量, 真实初始场 ψ_0 的大小分别为: $\|\psi_0\|_E = 6.5774$, $\|\psi_0\|_{L_2} = 4.2332$, 而初始分析误差 (即初始分析场与真实初始场之间的误差) 的大小分别为 1.1746 和 0.1206。另外, 本文与 Jiang and Mu (2009) 类似, 选择 2 天为优化时间计算上述控制预报的 SVs 和 CNOPs。对于初始扰动约束条件的大小, 我们也与 Jiang and Mu (2009) 类似, 选择上述初始分析误

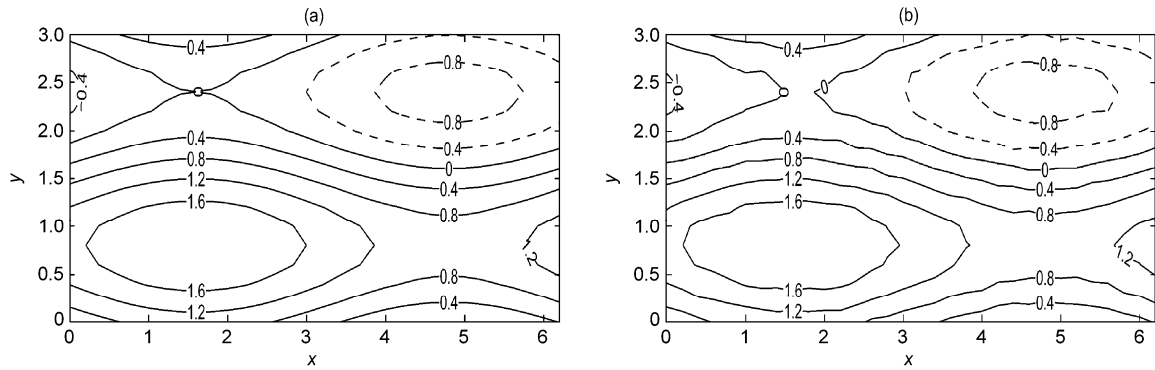


图1 (a) 真实初始场 ψ_0 和对应的 (b) 初始分析场的空间结构。实线代表正值，虚线代表负值

Fig. 1 The streamfunction fields of (a) the true initial field ψ_0 and (b) the associated initial analysis field. The solid and dashed lines refer to positive values and negative values, respectively

差的大小（分别以能量范数和 L_2 范数度量）作为约束半径大小。另外，为了阐明 CNOPs 和 FSVs 的差别是否由非线性物理过程导致，本文也选择了约束半径比较小的情形（如约束半径取为 3×10^{-6} ）计算 CNOPs 和 FSVs。为了揭示较短优化时间情形下，CNOPs 和 FSVs 结构差别的原因，拟进行以下四组试验，四组试验的区别在于计算 CNOP 和 FSV 时所选取的初始扰动和扰动发展的度量范数不同，详见表 1。其中，试验一是为了再现 Jiang and Mu (2009) 所计算的 CNOP 和 FSV；试验二的目的是与试验一的结果进行对比，分析 CNOP 和 FSV 异同的可能原因；试验三和试验四则是为了与试验二比较，分析不同的初始扰动范数对 CNOP 和 FSV 异同的影响。

表 1 数值试验设置

Table 1 Design of the numerical experiments

求解 CNOP 和 FSV 的范数		试验一		试验二		试验三		试验四	
		CNOP	FSV	CNOP	FSV	CNOP	FSV	CNOP	FSV
初始扰动范数	能量范数		√			√	√		
扰动发展范数	L_2 范数	√		√	√	√		√	√
扰动发展范数	能量范数	√	√	√	√	√	√		
展范数	L_2 范数							√	√

3.1 试验一

如表 1 所示，在该试验中，我们选取度量 SVs 和 CNOP 的范数与 Jiang and Mu (2009) 相同，即求解 SVs 的初始扰动范数和扰动发展范数采用的都是能量范数，而求解 CNOP 的初始扰动范数是 L_2 范数，扰动发展范数则是能量范数。表 2 给出了约束半径为 3×10^{-6} 和 0.1206 时 FSV 和 CNOP 对应的目标函数值；图 2 给出了约束半径分别为 3×10^{-6}

和 0.1206 时 FSV 和 CNOP 所描述的流函数的空间结构，其中，目标函数如 (10) 式所示；FSV 已被尺度化，和 CNOP 具有相同的大小（在 L_2 范数意义下）。

表 2 初始扰动的约束半径为 3×10^{-6} 和 0.1206 时 FSV 和 CNOP 对应的目标函数值（试验一）

Table 2 The objective function values corresponding to the FSV (first singular vector) and CNOP (conditional nonlinear optimal perturbation) for the constraint radius of 3×10^{-6} and 0.1206 in experiment 1

约束半径	FSV 对应的目标函数值	CNOP 对应的目标函数值
3×10^{-6}	6.3247×10^{-5}	1.3426×10^{-4}
0.1206	2.3884	4.9763

如表 2 所示，即使约束半径为 3×10^{-6} ，CNOP 对应的目标函数值也明显大于 FSV 对应的目标函数值；当约束半径增大为 0.1206 时，FSV 和 CNOP 对应的目标函数值增大，并且 CNOP 和 FSV 对应的目标函数值之差也变得更大。

图 2 表明，即使约束半径为较小的 3×10^{-6} ，FSV 和 CNOP 的空间结构也存在明显的差别；随着约束半径增大为 Jiang and Mu (2009) 所使用的分析误差大小（在此为 0.1206），CNOP 的空间结构中出现了更多的小尺度结构，FSV 和 CNOP 之间的差别变得更大，这与 Jiang and Mu (2009) 的结果一致；即当优化时间为 2 天，约束半径取为分析误差的大小（以 L_2 范数度量）时，FSV 和 CNOP 的空间结构存在明显的差别。那么，图 2 中 FSV 和 CNOP 之间的差别主要是由非线性物理过程作用导致的结果吗？

如引言所述，前人的研究表明，当初始扰动的

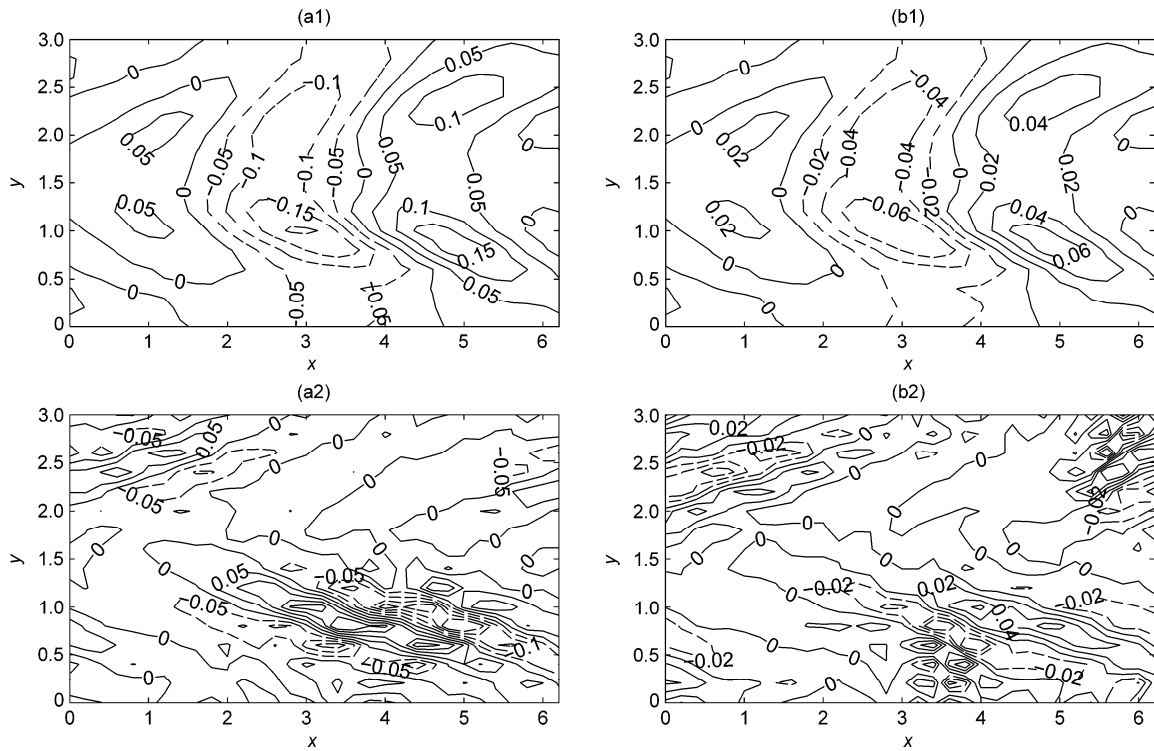


图2 试验一得到的FSV和CNOP所描述的流函数的空间结构:(a1)FSV和(a2)CNOP的约束半径为 3×10^{-6} ; (b1)FSV和(b2)CNOP的约束半径为0.1206。其中,(a1)和(a2)对应的FSV和CNOP的值被放大了 10^5 倍。实线代表正值,虚线代表负值

Fig. 2 The streamfunction fields of the FSV and CNOP from the results of experiment 1: (a1) FSV and (a2) CNOP for the constraint radius of 3×10^{-6} , and (b1) FSV and (b2) CNOP for the constraint radius of 0.1206. The values of (a1) and (a2) are amplified by a factor 10^5 ; the solid and dashed lines refer to positive and negative values, respectively

约束半径较小,且优化时间较短时,CNOP与FSV的空间结构差别较小,FSV可以近似CNOP。而表2和图2表明,即使约束半径取为较小的 3×10^{-6} ,FSV对应的目标函数值明显小于CNOP对应的目标函数值,且FSV和CNOP的空间结构存在很大的差别。究竟什么原因造成的呢?与前人的试验设置对比,我们发现他们在求解FSV和CNOP时使用的范数一致,而试验一和Jiang and Mu (2009)中求解FSV和CNOP时使用的范数不一致。因此,图2中FSV与CNOP空间结构的显著差别应该是由两方面造成的,一方面可能是由于试验一求解SVs和CNOP时范数不一致引起的;另一方面则是由于非线性影响的结果。那么,究竟主要是哪一方面的原因导致FSV和CNOP的差别呢?为了回答这个问题,我们进行了试验二。

3.2 试验二

在试验二中,求解SVs和CNOP的初始扰动范数是 L_2 范数,扰动发展范数是能量范数(如表1所示)。表3给出了约束半径为 3×10^{-6} 和0.1206

时FSV和CNOP对应的目标函数值;图3给出了约束半径分别为 3×10^{-6} 和0.1206时FSV和CNOP所表征的流函数的空间结构,其中,目标函数如(10)式所示;FSV已被尺度化,和CNOP具有相同的大小(在 L_2 范数意义下)。

表3 初始扰动的约束半径为 3×10^{-6} 和0.1206时FSV和CNOP对应的目标函数值(试验二)

Table 3 The objective function values corresponding to the FSV and CNOP for the constraint radius of 3×10^{-6} and 0.1206 in experiment 2

约束半径	FSV 对应的目标函数值	CNOP 对应的目标函数值
3×10^{-6}	1.3426×10^{-4}	1.3426×10^{-4}
0.1206	4.0204	4.9763

如表3所示,当约束半径为 3×10^{-6} 时,CNOP和FSV的目标函数值相等;当约束半径增大为0.1206时,FSV和CNOP对应的目标函数值增大,并且CNOP对应的目标函数值大于FSV对应的目标函数值。

图3表明,当约束半径为 3×10^{-6} 时,FSV和

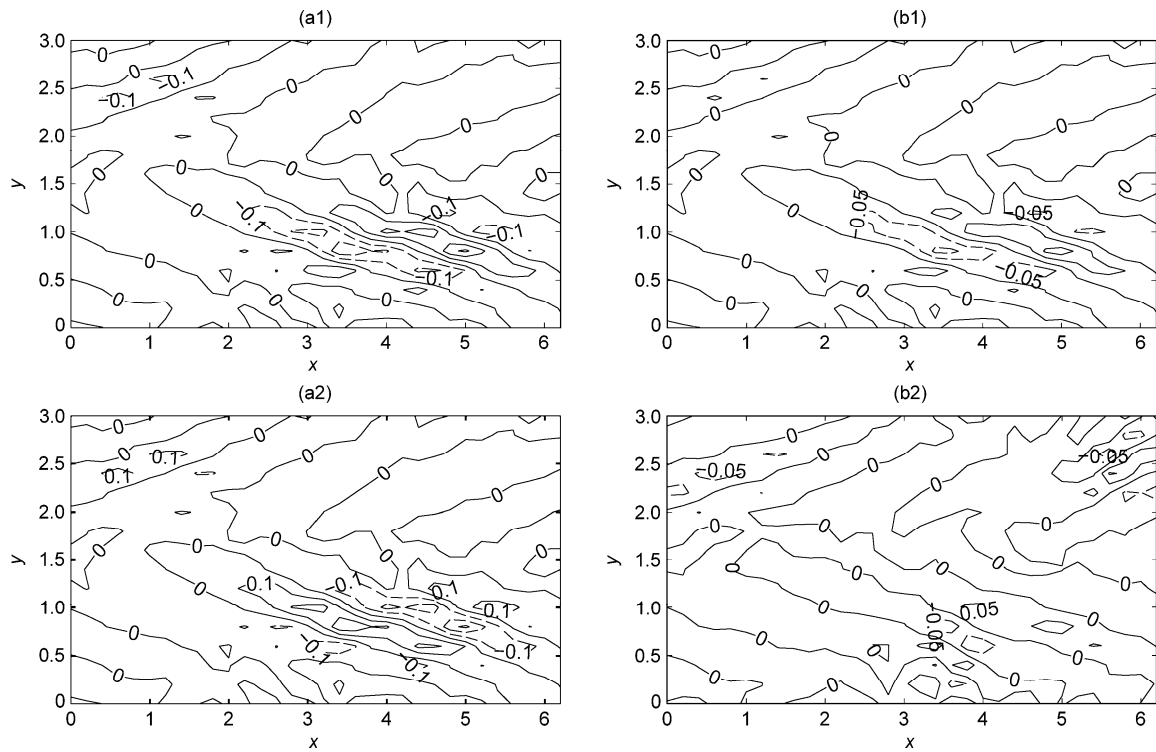


图3 同图2, 但为试验二的结果
Fig. 3 As Fig. 2, but for the results of experiment 2

CNOP 的空间结构相差很小, 几乎完全一致。当约束半径增大为 0.1206 时, FSV 和 CNOP 的空间结构类似但有明显的差别。这些结果和前人的结论一致, 即在 2 天的优化时间内, 非线性物理过程的影响相对较小, 小扰动的发展可以近似认为是线性的, 因此 CNOP 和 FSV 相差很小, 几乎完全一致; 而较大的初始扰动则受到了非线性物理过程的影响, 其发展并不是线性的, 因此 CNOP 和 FSV 有较大的差别。

对比试验一和试验二中约束半径为 3×10^{-6} 时 FSV、CNOP 对应的目标函数值和空间结构, 我们发现: 虽然初始扰动的约束半径相同, 但是与试验一不同, 试验二得到的 FSV 对应的目标函数值和 CNOP 对应的目标函数值相等, 并且试验二中 FSV 和 CNOP 的空间结构几乎完全相同, 即试验二得到的 FSV 可近似为 CNOP。

上述结果表明, 对于较短的优化时间 (较小的初始扰动的发展可近似为线性), 即使约束半径很小, 如果度量 SVs 和 CNOP 大小的范数不同 (如试验一), 则 FSV 并不是在优化时间内取得最大发展的初始扰动, 与 CNOP 有明显的差别; 如果求解 SVs 和 CNOP 的范数一致 (例如试验二), 则 FSV

在优化时间内取得最大发展, 和 CNOP 几乎完全相同。因此, 当优化时间较短时, 度量 SVs 和 CNOP 大小的范数不同将导致 FSV 和 CNOP 相差很大, 而当度量 SVs 和 CNOP 大小的范数相同时, FSV 和 CNOP 之间的差别主要是非线性物理过程作用的结果。为了进一步验证上述结论, 本文分别将度量 SVs 和 CNOP 大小以及目标函数表征的扰动发展大小的所有范数取为能量范数和 L_2 范数进行了试验三和试验四。

3.3 试验三

在试验三中, 将度量 SVs 和 CNOP 大小以及目标函数表征的扰动发展大小的范数都取为能量范数 (见表 2)。表 4 给出了约束半径为 3×10^{-6} 和 1.1746 时 FSV 和 CNOP 对应的目标函数值, 其结果和表 3 一致; 图 4 给出了约束半径分别为 3×10^{-6} 和 1.1746 时 FSV 和 CNOP 表征的流函数的空间结构, 其中, 目标函数如 (10) 式所示, FSV 与 CNOP 具有相同的大小 (在能量范数意义下)。

图 4 表明, 当约束半径较小 (3×10^{-6}) 时, FSV 和 CNOP 的空间结构差别很小, 几乎完全一致; 当约束半径较大 (1.1746) 时, FSV 和 CNOP 的空间结构有明显的差别。因此, 试验三的结果支持试验

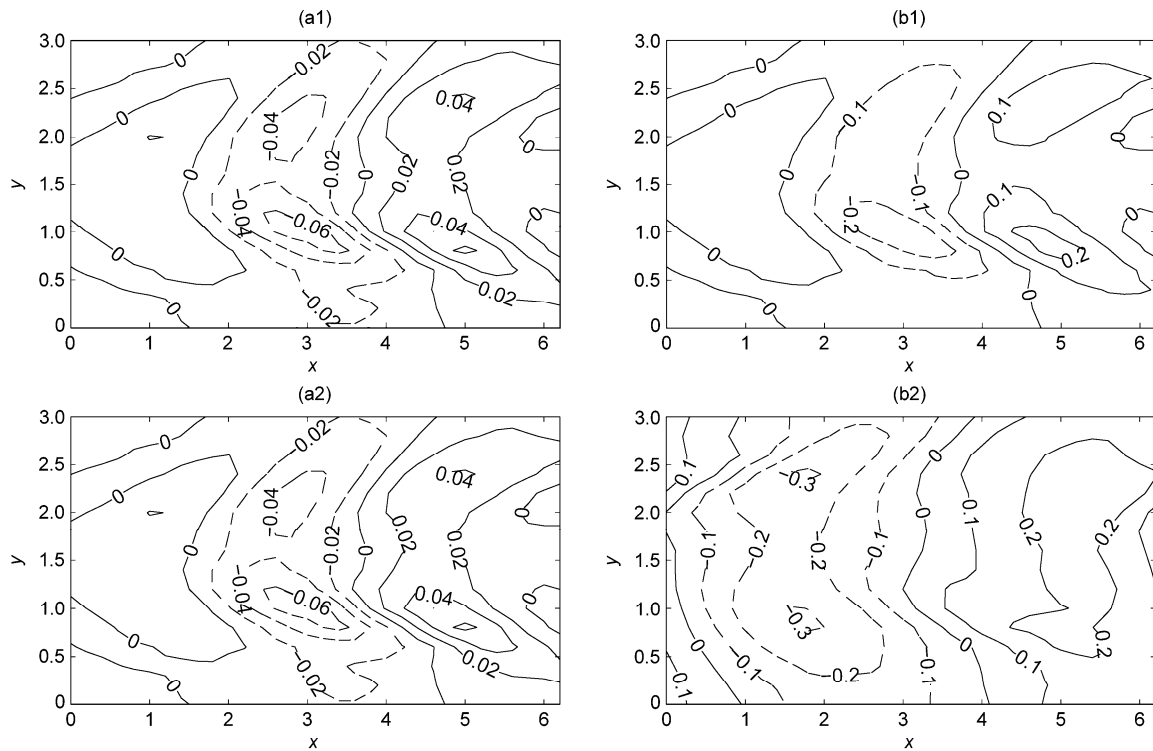


图4 试验三得到的FSV和CNOP所表征的流函数的空间结构:(a1)FSV和(a2)CNOP的约束半径为 3×10^{-6} ; (b1)FSV和(b2)CNOP的约束半径为1.1746。其中,(a1)和(a2)对应的FSV和CNOP的值被放大了 10^5 倍。实线代表正值,虚线代表负值

Fig. 4 The streamfunction fields of FSV and CNOP from the results of experiment 3: The (a1) FSV and (a2) CNOP for the constraint radius of 3×10^{-6} , and the (b1) FSV and (b2) CNOP for the constraint radius of 1.1746. The values of (a1) and (a2) are amplified by a factor 10^5 ; the solid and dashed lines refer to positive and negative values, respectively

二的结果,即当优化时间较短时,度量SVs和CNOP大小的范数不同将导致FSV和CNOP相差很大,而当度量SVs和CNOP大小的范数相同时,FSV和CNOP之间的差别主要是非线性物理过程作用的结果。

表4 初始扰动的约束半径为 3×10^{-6} 和1.1746时FSV和CNOP对应的目标函数值(试验三)

Table 4 The objective function values corresponding to the FSV and CNOP for the constraint radius of 3×10^{-6} and 1.1746 in experiment 3

约束半径	FSV 对应的目标函数值	CNOP 对应的目标函数值
3×10^{-6}	2.1314×10^{-5}	2.1314×10^{-5}
1.1746	5.7487	6.4576

3.4 试验四

试验四中求解SVs和CNOP时的约束条件和目标函数所用的度量范数均取为 L_2 范数。结果同样表明,当初始扰动的约束半径较小时,FSV和CNOP表征的流函数的空间结构相差很小;而当约束半径较大时,FSV和CNOP的空间结构有明显差别,该

差别主要是由非线性物理过程影响的结果(表5;图5)。

表5 初始扰动的约束半径为 3×10^{-6} 和0.1206时FSV和CNOP对应的目标函数值(试验四)

Table 5 The objective function values corresponding to the FSV and CNOP for the constraint radius of 3×10^{-6} and 0.1206 in experiment 4

约束半径	FSV 对应的目标函数值	CNOP 对应的目标函数值
3×10^{-6}	5.4086×10^{-5}	5.4086×10^{-5}
0.1206	1.8923	2.4041

对比试验三和四的结果,我们发现,尽管度量初始扰动大小以及它们的发展大小的范数相同,但分别得到的FSV和CNOP的空间结构还是有较大差别。这说明在实际应用中,正确选择范数是非常重要的,因此对于确定的实际问题哪种度量范数更合适则是需要进一步探讨的一个问题。总之,我们应结合具体物理问题选取合适的度量范数,从而合理地揭示非线性物理过程的影响机理。

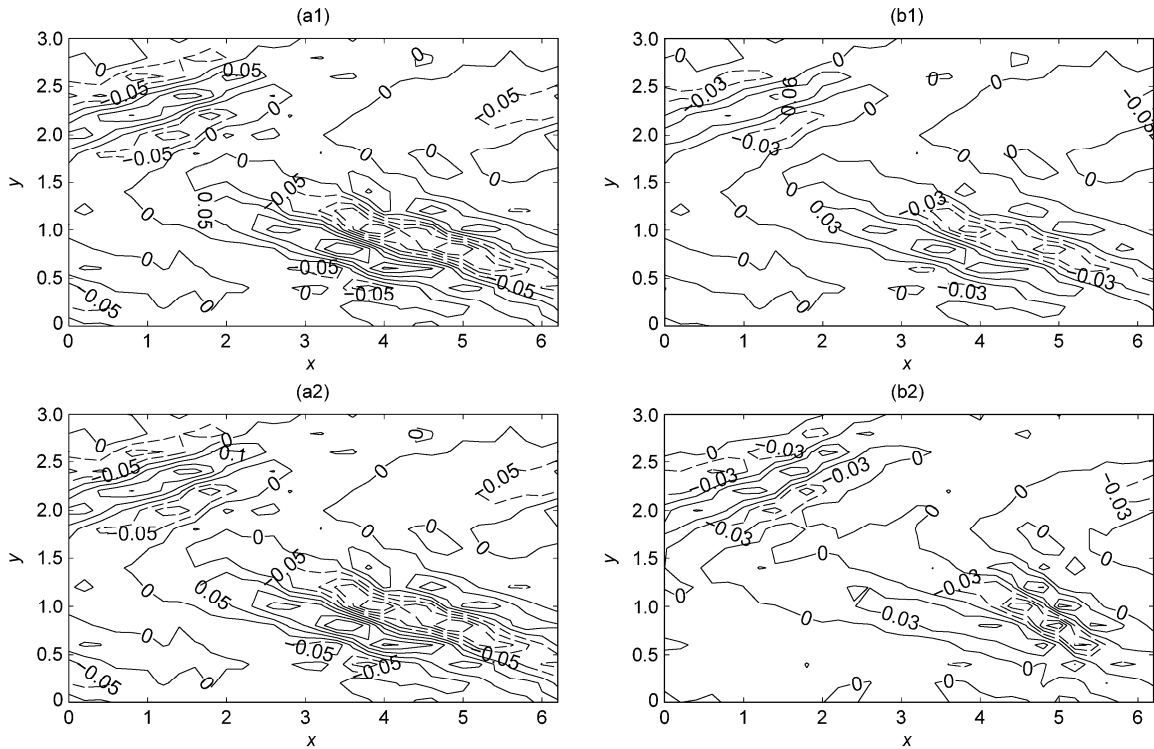


图5 同图2，但为试验四的结果
Fig. 5 As Fig. 2, but for the results of experiment 4

4 总结和讨论

为了研究优化时间较短时 FSV 和 CNOP 的差别是否由非线性物理过程的影响导致，本文设计了四个试验，分析了不同范数设置和约束半径大小对应的 FSV 和 CNOP 的异同。试验结果表明，当优化时间较短时，如果求解 SVs 和 CNOP 的范数一致，且约束半径较小，则 FSV 和 CNOP 对应的目标函数数值相等，空间结构相差很小，几乎完全一致；但当约束半径较大时，CNOP 对应的目标函数值大于 FSV，FSV 和 CNOP 的空间结构有明显差别，该差别主要是由非线性物理过程影响导致的；如果求解 SVs 和 CNOP 的范数不一致，则无论约束半径大小如何，FSV 和 CNOP 对应的目标函数值相差也比较大，空间结构有明显的差别。对比前种情形，可以推理得到，该类差别应由度量范数的差别和非线性物理过程共同影响导致的。

从上述结果可知，在 Jiang and Mu (2009) 中，FSV 和 CNOP 空间结构的明显差别是由求解 SVs 和 CNOP 时范数不一致和非线性物理过程共同作用

导致的结果。他们将 FSV 替换为 CNOP 可以改善集合预报的技巧，这说明在集合预报中，我们或许可以选择不同范数度量的 SVs 和 CNOP 共同作为集合成员，进行集合预报，进而提高预报技巧；但针对某一具体非线性物理问题，我们还需对 SVs 和 CNOP 采用相同的范数，考察它们的差别，进而揭示非线性物理过程的影响。例如，当讨论由 FSV 和 CNOP 所确定的某一天气和气候事件的最优前期征兆的差异时，我们关注的是非线性物理过程的影响，则应选取相同的初始扰动范数以及相同的扰动发展范数来求解 FSV 和 CNOP，以摒弃范数的不同对 FSV 和 CNOP 空间结构的影响。当然，究竟选取何种范数使得求解的 CNOP 能够导致更大的扰动发展，则是需要进一步研究的问题。

参考文献 (References)

Buizza R, Palmer T N. 1995. The singular-vector structure of the atmospheric global circulation [J]. *J. Atmos. Sci.*, 52: 1434-1456, doi:10.1175/1520-0469(1995)052<1434:Tsvsot>2.0.co;2.
Buizza R, Cardinali C, Kelly G, et al. 2007. The value of observations. II: The value of observations located in singular-vector-based target areas [J].

- Quart. J. Roy. Meteor. Soc., 133: 1817–1832, doi:10.1002/qj.149.
- Descamps L, Ricard D, Joly A, et al. 2007. Is a real cyclogenesis case explained by generalized linear baroclinic instability? [J]. *J. Atmos. Sci.*, 64: 4287–4308, doi:10.1175/2007JAS2292.1.
- Duan W S, Mu M. 2009. Conditional nonlinear optimal perturbation: Applications to stability, sensitivity, and predictability [J]. *Science in China Series D: Earth Sciences*, 52 (7): 883–906, doi:10.1007/s11430-009-0090-3.
- Duan W S, Zhang R. 2010. Is model parameter error related to a significant spring predictability barrier for El Niño events? Results from a theoretical model [J]. *Advances in Atmospheric Sciences*, 27: 1003–1013, doi:10.1007/s00376-009-9166-4.
- Duan W S, Mu M, Wang B. 2004. Conditional nonlinear optimal perturbations as the optimal precursors for El Niño–Southern Oscillation events [J]. *J. Geophys. Res.*, 109 (D23), doi:10.1029/2004JD004756.
- Duan W S, Yu Y S, Xu H, et al. 2013. Behaviors of nonlinearities modulating the El Niño events induced by optimal precursory disturbances [J]. *Climate Dyn.*, 40: 1399–1413, doi:10.1007/s00382-012-1557-z.
- 段晚锁, 丁瑞强, 周非凡. 2013. 数值天气预报和气候预测可预报性研究的若干动力学方法 [J]. *气候与环境研究*, 18 (4): 524–538. Duan Wansuo, Ding Ruiqiang, Zhou Feifan. 2013. Several dynamical methods used in predictability studies for numerical weather forecasts and climate prediction [J]. *Climatic and Environmental Research (in Chinese)*, 18 (4): 524–538, doi:10.3878/j.issn.1006-9585.2012.12009.
- Ehrendorfer M, Tribbia J J. 1997. Optimal prediction of forecast error covariances through singular vectors [J]. *J. Atmos. Sci.*, 54: 286–313, doi:10.1175/1520-0469(1997)054<0286:OPOFEC>2.0.CO;2.
- Gelaro R, Buizza R, Palmer T N, et al. 1998. Sensitivity analysis of forecast errors and the construction of optimal perturbations using singular vectors [J]. *J. Atmos. Sci.*, 55: 1012–1037, doi:10.1175/1520-0469(1998)055<1012:SAOFEA>2.0.CO;2.
- 姜智娜. 2007. 条件非线性最优扰动在集合预报中的应用 [D]. 中国科学院大气物理研究所博士学位论文, 116pp. Jiang Zhina. 2007. Application of conditional nonlinear optimal perturbation to ensemble prediction [D]. Ph. D. dissertation (in Chinese), Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, 116pp.
- Jiang Z N, Mu M. 2009. A comparison study of the methods of conditional nonlinear optimal perturbations and singular vectors in ensemble prediction [J]. *Advances in Atmospheric Sciences*, 26 (3): 465–470, doi:10.1007/s00376-009-0465-6.
- Jiang Z N, Mu M, Wang D H. 2009. Ensemble prediction experiments using conditional nonlinear optimal perturbation [J]. *Science in China Series D: Earth Sciences*, 52 (4): 511–518, doi:10.1007/s11430-009-0042-y.
- Langland R H. 2005. Issues in targeted observing [J]. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 131: 3409–3425, doi:10.1256/qj.05.130.
- Leutbecher M, Palmer T N. 2008. Ensemble forecasting [J]. *J. Comput. Phys.*, 227: 3515–3539, doi:10.1016/j.jcp.2007.02.014.
- Lorenz E N. 1965. A study of the predictability of a 28-variable atmospheric model [J]. *Tellus*, 17: 321–333, doi:10.1111/j.2153-3490.1965.tb01424.x.
- Lorenz E N. 1975. The physical bases of climate and climate modeling, in: *Climate Predictability*. GARP Publication Series 16, World Meteorological Association, Geneva, 132–136.
- Molteni F, Buizza R, Palmer T N, et al. 1996. The ECMWF ensemble prediction system: Methodology and validation [J]. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 122: 73–119, doi:10.1002/qj.49712252905.
- Mu M, Jiang Z N. 2008. A new approach to the generation of initial perturbations for ensemble prediction: Conditional nonlinear optimal perturbation [J]. *Chinese Science Bulletin*, 53 (13): 2062–2068, doi:10.1007/s11434-008-0272-y.
- 穆穆, 段晚锁. 2013. 条件非线性最优扰动在可预报性问题研究中的应用 [J]. *大气科学*, 37 (2): 281–296. Mu Mu, Duan Wansuo. 2013. Applications of conditional nonlinear optimal perturbation to the studies of predictability problems [J]. *Chinese Journal of Atmospheric Sciences (in Chinese)*, 37 (2): 281–296, doi:10.3878/j.issn.1006-9895.2012.12319.
- Mu M, Duan W S, Wang J F. 2002. Nonlinear optimization problems in atmospheric and oceanic sciences [J]. *Computational Mathematics and Modeling, Thailand, Special Volume*, 155–164.
- Mu M, Duan W S, Wang B. 2003. Conditional nonlinear optimal perturbation and its applications [J]. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 10: 493–501, doi:10.5194/npg-10-493-2003.
- 穆穆, 王洪利, 周非凡. 2007. 条件非线性最优扰动方法在适应性观测研究中的初步应用 [J]. *大气科学*, 31 (6): 1102–1112. Mu Mu, Wang Hongli, Zhou Feifan. 2007. A preliminary application of conditional nonlinear optimal perturbation to adaptive observation [J]. *Chinese Journal of Atmospheric Sciences (in Chinese)*, 31 (6): 1102–1112, doi:10.3878/j.issn.1006-9895.2007.06.06.
- Mu M, Duan W S, Wang B. 2007a. Season-dependent dynamics of nonlinear optimal error growth and El Niño–Southern Oscillation predictability in a theoretical model [J]. *J. Geophys. Res.*, 112: D10113, doi:10.1029/2005JD006981.
- Mu M, Xu H, Duan W S. 2007b. A kind of initial errors related to “spring predictability barrier” for El Niño events in Zebiak-Cane model [J]. *Geophys. Res. Lett.*, 34: L03709, doi:10.1029/2006GL027412.
- Mu M, Zhou F F, Wang H L. 2009. A method for identifying the sensitive areas in targeted observations for tropical cyclone prediction: Conditional nonlinear optimal perturbation [J]. *Mon. Wea. Rev.*, 137: 1623–1639, doi:10.1175/2008MWR2640.1.
- Mu M, Duan W S, Wang Q, et al. 2010. An extension of conditional nonlinear optimal perturbation approach and its applications [J]. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 17: 211–220, doi:10.5194/npg-17-211-2010.
- Mureau R, Molteni F, Palmer T N. 1993. Ensemble prediction using dynamically conditioned perturbations [J]. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 119: 299–323, doi:10.1002/qj.49711951005.
- Palmer T N, Buizza R, Molteni F, et al. 1994. Singular vectors and the predictability of weather and climate [J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 348: 459–475, doi:10.1098/rsta.1994.0105.
- Palmer T N, Gelaro R, Barkmeijer J, et al. 1998. Singular vectors, metrics, and adaptive observations [J]. *J. Atmos. Sci.*, 55: 633–653, doi:10.1175/1520-0469(1998)055<0633:SVMAAO>2.0.CO;2.
- Penland C, Sardeshmukh P D. 1995. The optimal growth of tropical sea surface temperature anomalies [J]. *J. Climate*, 8: 1999–2024, doi:10.1175/1520-0442(1995)008<1999:TOGOTS>2.0.CO;2.

- Qin X H, Mu M. 2011. A study on the reduction of forecast error variance by three adaptive observation approaches for tropical cyclone prediction [J]. *Mon. Wea. Rev.*, 139: 2218–2232, doi:10.1175/2010MWR3327.1.
- Rivière O, Lapeyre G, Talagrand O. 2008. Nonlinear generalization of singular vectors: Behavior in a baroclinic unstable flow [J]. *J. Atmos. Sci.*, 65: 1896–1911, doi:10.1175/2007JAS2378.1.
- Sun G D, Mu M. 2009. Nonlinear feature of the abrupt transitions between multiple equilibria states of an ecosystem model [J]. *Advances in Atmospheric Sciences*, 26 (2): 293–304, doi:10.1007/s00376-009-0293-8.
- Terwisscha van Scheltinga A D, Dijkstra H A. 2008. Conditional nonlinear optimal perturbations of the double-gyre ocean circulation [J]. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 15: 727–734, doi:10.5194/npg-15-727-2008.
- Trefethen L N, Trefethen A E, Reddy S C, et al. 1993. Hydrodynamic stability without eigenvalues [J]. *Science*, 261: 578–584, doi:10.1126/science.261.5121.578.
- 谢东东, 孙国栋, 邵爱梅, 等. 2013. 草原生态系统模式中参数不确定性导致的模拟结果不确定性研究 [J]. *气候与环境研究*, 18 (3): 375–386.
- Xie Dongdong, Sun Guodong, Shao Aimei, et al. 2013. A study of simulation uncertainties caused by parameter uncertainties in a grassland ecosystem model [J]. *Climatic and Environmental Research (in Chinese)*, 18 (3): 375–386, doi:10.3878/j.issn.1006-9585.2012.11179.
- Yu Y S, Mu M, Duan W S. 2012. Does model parameter error cause a significant “spring predictability barrier” for El Niño events in the Zebiak-Cane model? [J]. *J. Climate*, 25: 1263–1277, doi:10.1175/2011JCLI4022.1.
- Zheng, F, Wang H, Zhu J. 2009. ENSO ensemble prediction: Initial error perturbations vs. model error perturbations [J]. *Chinese Science Bulletin*, 54 (14): 2516–2523, doi:10.1007/s11434-009-0179-2.
- Zhou F F, Mu M. 2012. The impact of horizontal resolution on the CNOP and on its identified sensitive areas for tropical cyclone predictions [J]. *Advances in Atmospheric Sciences*, 29 (1): 36–46, doi:10.1007/s00376-011-1003-x.
- 周非凡, 张贺. 2014. 基于 CNOP 方法的台风目标观测中三种敏感区确定方案的比较研究 [J]. *大气科学*, 38 (2): 261–272. Zhou Feifan, Zhang He. 2014. Study of the schemes based on CNOP method to identify sensitive areas for typhoon targeted observations [J]. *Chinese Journal of Atmospheric Sciences (in Chinese)*, 38 (2): 261–272, doi:10.3878/j.issn.1006-9895.2013.13129.